На правах рукописи

Зименс Карина Раисовна

ОПЕРАТОР СВЕРТКИ ДАНКЛА И ЗАДАЧА ВАЛЛЕ ПУССЕНА

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2016

Работа выполнена на кафедре специальных глав математики ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор **Напалков Валентин Васильевич**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа ФГАОУ ВО Институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, г. Ростов-на-Дону **Абанин Александр Васильевич**

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теоретической и прикладной механики и математики ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева–КАИ», г. Казань **Миронова Светлана Рафаиловна**

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Защита состоится « 15 » сентября 2016 года в 14 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в в Научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 35.

Автореферат разослан «__» мая 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10
кандидат физ.-мат. наук, доцент Е.К. Липачев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Пусть $H(\mathbb{C})$ – пространство целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах. Обозначим через $P_{\mathbb{C}}$ – пространство целых функций экспоненциального типа с топологией индуктивного предела.

Основным объектом изучения в диссертации является одномерный оператор Данкла. На пространстве $H(\mathbb{C})$ он имеет вид

$$\Lambda[f(z)] = f'(z) + \frac{\alpha}{z}(f(z) - f(-z)),\ \alpha > 0,\ f \in H(\mathbb{C}). \tag{1}$$

Оператор Данкла был введен Чарльзом Ф. Данклом в конце 80-х годов. Это дифференциальный оператор, связанный с конечными группами отражений в евклидовом пространстве. Эти операторы играют важную роль в различных задачах математики и физики. Например, в многомерном случае эти операторы находят применение в квантовой задаче Калоджеро-Мозера-Сазерленда (см., например, А.П. Веселова[1], Л. Лапоинта, Л. Винета[2]).

Большой интерес вызывает изучение и одномерных операторов Данкла. В настоящее время появляется все больше работ, в которых развивается гармонический анализ, связанный с одномерным оператором Данкла, оператором свертки Данкла, преобразованием Данкла. Здесь можно отметить таких авторов, как М. Реслер, М. де Же, К. Тримеш, А.В. Братищев, С.С. Платонов, Ф. Солтани, В.Э. Ким и др.

В диссертации изучается вопрос о разрешимости уравнения свертки Данкла и аппроксимации решений однородного уравнения свертки Данкла на пространствах $H(\mathbb{C})$ и $P_{\mathbb{C}}$. Задача является актуальной в сязи с тем, что такие задачи решались для сверточных операторов. Вклад был внесен многими математиками: А.В. Абаниным, К. Беренштейном, А.О. Гельфондом, О.В. Епифановым, Ю.Ф. Коробейником, И.Ф. Красичковым-Терновским, А.С. Кривошеевым, А.Ф. Леонтьевым, Б. Мальгранжем, Х. Мугли, И.Х. Мусиным, В.В. Напалковым, Л. Хермандером, Р.С. Юлмухаметовым и др.

Следующей проблемой, которая решается в диссертации, является разрешимость задачи Валле Пуссена (интерполяционной задачи, задачи Коши) в $H(\mathbb{C})$ и $H(D)$, где $D-$ полуплоскость. Изначально задача Валле Пуссена ставилась для обыкновенного линейного дифференциального уравне-

[1]Веселов А.П. *Квантовая задача Калоджеро, уравнение Книжника–Замолодчикова и принцип Гюйгенса* // ТМФ. – 1994. – Т. 98. – № 3. – С. 524–535.

[2]Lapointe L., Vinet L. *Exact operator solution of the Calogero-Sutherland model* // Communs Math. Phys. – 1996. – V. 178. – P. 425–452.

ния n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

где коэффициенты $p_s(x)$, $s = 1, 2, \ldots, n$ – непрерывные функции на отрезке $[a, b]$, $x \in [a, b]$, $|y^{(s-1)}(x)| < +\infty$. Необходимо найти решение, удовлетворяющее следующим условиям

$$y(x_i) = c_i,\ i = 1, 2, \ldots, n;\ x_i \in [a, b].$$

Обобщения задачи Валле Пуссена рассматривалась для различных классов уравнений и пространств Н.В. Азбелевым, В.В. Бобочко, А. Мерилом, Д.С. Струппой, Ю.В. Покорным и др. Современная постановка задачи Валле Пуссена принадлежит В.В. Напалкову, который рассматривает эту задачу в ядре оператора свертки. В ядре оператора свертки в пространстве целых функций в работе В.В. Напалкова задача Валле Пуссена решается для целых узлов интерполяции. Для простых нулей характеристической функции и узлов, лежащих на вещественной оси, и узлов, заданных в угле, задача Валле Пуссена решена В.В. Напалковым и А.А. Нуятовым. Кратная интерполяционная задача решена С.Г. Мерзляковым и С.В. Попеновым. Отметим, что при решении этой задачи важную роль играет изучение проблемы сюръективности оператора композиции свертки и оператора умножения на целую фиксированную функцию.

Цели работы:

1. Доказательство сюръективности оператора композиции свертки Данкла и оператора умножения на фиксированную целую функцию.

2. Исследование секвенциальной достаточности нулей характеристической функции оператора свертки Данкла в пространстве $H(\mathbb{C})$.

3. Исследование секвенциальной достаточности нулей характеристической функции оператора свертки в пространстве $H(D)$, где D – полуплоскость.

4. Решение задачи Валле Пуссена в ядре оператора свертки Данкла в пространстве целых функций и задачи Валле Пуссена в ядре классического оператора свертки в пространстве аналитических функций на полуплоскости.

Методы исследования. Для решения поставленных задач использовались методы теории функций комплексного переменного, функционального анализа, высшей алгебры.

Научная новизна.

Представленные в диссертации результаты являются новыми и состоят в следующем:

1. Решена задача Валле Пуссена для оператора свертки Данкла на пространстве $H(\mathbb{C})$ в случае, когда нули характеристической функции лежат на вещественной оси. Исследованы случаи простых нулей характеристической функции и кратных нулей.

2. Решена задача Валле Пуссена для оператора классической свертки на полуплоскости с условием вполне регулярного роста характеристической функции. Исследован случай кратных нулей характеристической функции.

3. Доказана сюръективность композиции оператора свертки Данкла и оператора умножения на целую фиксированную функцию в пространстве целых функций.

4. Доказана секвенциальная достаточность нулей характеристической функции оператора свертки Данкла в пространстве $H(\mathbb{C})$ и секвенциальная достаточность нулей характеристической функции оператора свертки в пространстве $H(D)$, где D – полуплоскость.

Объем и структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 95 страницы. Список литературы состоит из 104 наименований. Все формулы, определения, леммы и теоремы занумерованы двумя цифрами, первая из которых указывает номер параграфа, вторая – номер по порядку.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах:

1. Третья международная научная конференция “Математическая физика и ее приложения” (Самара, 2012 г.);

2. VI Международная школа–конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых “Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании” (Уфа, 2012 г.);

3. Международная научная конференция “Нелинейный анализ и спектральные задачи” (Уфа, 2013 г.);

4. XI Международная Казанская летняя научная школа-конференция “Теория функций, ее приложения и смежные вопросы” (Казань, 2013 г.);

5. Четвертая международная научная конференция “Математическая физика и ее приложения” (Самара, 2014 г.);

6. Международная научная конференция “Нелинейный анализ и спектральные задачи” (Уфа, 2014 г.);

7. VII Международная школа–конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых “Фундаментальная математика и ее приложения в

естествознании" (Уфа, 2014 г.);

8. Научный семинар по теории функций и комплексному анализу Института математики с ВЦ УНЦ РАН под руководством чл. корр. РАН В.В. Напалкова (Уфа, 2012, 2014, 2016 гг.).

9. XII Международная Казанская летняя научная школа-конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (Казань, 2015 г.);

Публикации.

По теме диссертации опубликовано 13 работ, из них статьи [1], [2], [3], [4], [5] в журналах из списка ВАК. В совместных с научным руководителем публикациях В.В. Напалкову принадлежат постановки задач и указание методов исследования, а К.Р. Зименс – основные результаты и их доказательства.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** проведен обзор литературы по теме диссертации, описаны постановка задачи, методы исследования и приведено краткое содержание работы.

Глава 1 посвящена операторам Данкла (1) и операторам свертки Данкла. Операторы рассматриваются на пространствах целых функций и целых функций экспоненциального типа.

В первом параграфе изучаются свойства собственной функции оператора Данкла

$$y(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{p(1)p(2)\dots p(k)},$$

где

$$p(k) = k + \alpha(1 - e^{i\pi k}).$$

Для этой функции вычислен порядок $\rho = 1$ и тип $\sigma = 1$. Отметим, что собственными функциями оператора Данкла, соответствующим собственному значению $\lambda \in \mathbb{C}$, являются функции $Cy_\lambda(z)$, где $y_\lambda(z) = y(\lambda z)$. В работе показано, что система $\{y_\lambda(z), \lambda \in \mathbb{C}\}$ полна в пространстве $H(\mathbb{C})$.

Для произведения $p(1)p(2)\dots p(l)$ получена следующая оценка

$$l! < p(1)p(2)\dots p(l) < l!(1+2\alpha)^l.$$

Из этой оценки и представления собственной функции вытекает

$$e^{\frac{x}{1+2\alpha}} < y(x) < e^x,\ x > 0. \tag{2}$$

Во втором параграфе исследованы свойство производных собственных функций. Доказаны следующие леммы.

Лемма 2.1. *Пусть $y(x)$ – собственная функция оператора Данкла. Тогда*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^m y^{(m)}(x)}{x^n y^{(n)}(x)}=0,\quad m<n.$$

Лемма 2.2. *Пусть $y(x)$ – собственная функция оператора Данкла, $a,b\in\mathbb{R}_+$, $0\le a<b$. Тогда*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^m y^{(m)}(ax)}{x^n y^{(n)}(bx)}=0,\quad m,n=0,1,2,...$$

В параграфе 3 главы 1 исследуется оператор свертки Данкла на пространстве целых функций.

Определение 3.1. *Оператором сдвига Данкла S_z, где $z\in\mathbb{C}$, в пространстве $H(\mathbb{C})$ будем называть оператор следующего вида*

$$S_z[f(t)]=f(z)+\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda^k[f(z)]\frac{t^k}{p(1)p(2)\dots p(k)},\ f\in H(\mathbb{C}).$$

Отметим следующее свойство оператора сдвига Данкла при действии на собственную функцию $y_\lambda(z)$:

$$S_z[y(\lambda t)]=y(\lambda z)+\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda^k[y(\lambda z)]\cdot\frac{t^k}{p(1)\cdot p(2)\cdots p(k)}=y(\lambda z)y(\lambda t).$$

Определение 3.2. *Преобразованием Данкла $\varphi(\lambda)$ функционала $F\in H^*(\mathbb{C})$ будем называть функцию*

$$\varphi(\lambda)=(F,y(\lambda z)),\ \lambda\in\mathbb{C}.$$

Очевидно, что преобразование Данкла функционала $F\in H^*(\mathbb{C})$ принадлежит пространству $P_{\mathbb{C}}$.

Определение 3.3. *Пусть $F\in H^*(\mathbb{C})$, тогда оператором свертки Данкла в $H(\mathbb{C})$ будем называть*

$$M_\varphi[f(z)]=(F_t,S_z[f(t)]),\ f\in H(\mathbb{C}),$$

где φ– преобразование Данкла функционала F, S_z – оператор сдвига Данкла.

Отметим, что оператор свертки Данкла в $H(\mathbb{C})$ допускает и другое представление в терминах обобщенных производных

$$M_\varphi[f(z)] = \left(F_t, f(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda^k[f(z)] \frac{t^k}{p(1)p(2)\dots p(k)}\right) =$$

$$= a_0 f(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda^k[f(z)] \frac{(F, t^k)}{p(1)p(2)\dots p(k)} = a_0 f(z) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Lambda^k[f(z)].$$

В работе Дж. Бетанкора и др.[3] показано, что введенные операторы сдвига и свертки Данкла являются линейными непрерывными и действуют из $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C})$.

Пусть λ_k, $k = 1, 2\dots$ – нули характеристической функции φ, n_k – кратность соответсвующего нуля. В третьем параграфе решена аппроксимационная задача для операторов свертки Данкла в $H(\mathbb{C})$, а именно, доказаны следующие утверждения.

Лемма 3.1. *Для каждой пары* $(\lambda_k, n_k), k = 1, 2\dots,$ *система функций* $y(\lambda_k z), zy'(\lambda_k z), \dots, z^{n_k-1}y^{(n_k-1)}(\lambda_k z)$ *является решением однородного уравнения свертки Данкла.*

Теорема 3.3. *Пусть E – линейная оболочка*

$$\bigcup_k \{y(\lambda_k z), zy'(\lambda_k z), .., z^{n_k-1}y^{(n_k-1)}(\lambda_k z)\}.$$

Тогда замыкание E совпадает с W – множеством всех целых решений однородного уравнения свертки Данкла $M_\varphi[f(z)] = 0$, $\varphi \in P_\mathbb{C}$.

В работе Дж. Бетанкора и др. рассматривалась задача разрешимости неоднородного уравнения свертки Данкла $M_\varphi[f(z)] = g(z)$ в пространстве $H(\mathbb{C})$. Здесь доказывается этот результат более легким способом, используя сопряженный оператор. Справедлива

Теорема 3.5. *Оператор свертки Данкла M_φ сюръективен в $H(\mathbb{C})$.*

В параграфе 4 главы 1 вводим и изучаем оператор свертки Данкла на пространстве целых функций экспоненциального типа. Справедлива следующая лемма:

Лемма 4.1. *Любую функцию $g \in P_\mathbb{C}$ можно представить в следующем виде*

$$g(z) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k z^k}{p(1)p(2)\dots p(k)}, \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} < \infty. \tag{3}$$

---

[3] Betancor J.J., Sifi M., Trimeche K. *Hypercyclic and chaotic convolution operators associated with the Dunkl operators on C* // Acta Math. Hungarica. – 2005. – V. 106. –№ 1-2. – P. 101–116.

где $p(k) = k + \alpha(1 - e^{i\pi k})$.

По функции $g(z)$ из (3) построим ассоциированную по Борелю функцию

$$\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^{k+1}}. \tag{4}$$

Справедливо интегральное представление

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_A y(zw)\gamma(w)dw, \tag{5}$$

где контур A замкнутый, спрямляемый и содержит особенности ассоциированной по Борелю функции γ.

Определение 4.1. *Оператором сдвига Данкла* S_z, $z \in \mathbb{C}$ *в пространстве* $P_\mathbb{C}$ *определим по формуле*

$$S_z[g(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_A y(zw)y(tw)\gamma(w)dw, \; g \in P_\mathbb{C}$$

где контур A *замкнутый, спрямляемый и охватывает особенности функции* γ, *ассоциированной по Борелю с функцией* g.

Обозначим через $P^*_\mathbb{C}$ пространство, сопряженное к $P_\mathbb{C}$.

Определение 4.2. *Преобразованием Данкла* $\psi(\lambda)$ *функционала* $G \in P^*_\mathbb{C}$ *будем называть функцию*

$$\psi(\lambda) = (G, y(\lambda z)), \; \lambda \in \mathbb{C}.$$

Преобразование Данкла функционала $G \in P^*_\mathbb{C}$ – целая функция[4]. Действие функционала G на сдвиг Данкла в $P_\mathbb{C}$ следующее

$$(G, S_z[g(t)]) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_A (G, y(tw))y(zw)\gamma(w)dw =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_A \psi(w)y(zw)\gamma(w)dw.$$

Определение 4.3. *Оператором свертки Данкла в* $P_\mathbb{C}$ *будем называть следующий оператор*

$$M_\psi[g(z)] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_A \psi(w)y(zw)\gamma(w)dw, \; g \in P_\mathbb{C} \tag{6}$$

[4]Напалков В В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* – Москва: Наука, 1982, С. 241.

где контур A замкнутый, спрямляемый и охватывает особенности функции γ, ассоциированной по Борелю с функцией g.

Показано, что в пространстве $P_{\mathbb{C}}$ сопряженный оператор к оператору свертки Данкла M_ψ есть оператор умножения на характеристическую функцию ψ.

Очевидно, что оператор свертки Данкла в $P_{\mathbb{C}}$ линеен и непрерывен.

Основная задача этого параграфа – решение проблемы спектрального синтеза для однородного уравнения свертки Данкла в $P_{\mathbb{C}}$.

$$M_\psi[g(z)] = 0,\ g \in P_{\mathbb{C}}. \tag{7}$$

Пусть целая функция $\psi(\lambda)$ имеет нули $(\mu_1, m_1), .., (\mu_k, m_k), ..$, где m_k - кратность соответствующего нуля μ_k. Пусть

$$E_{P_{\mathbb{C}}} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{y(\mu_k z), zy'(\mu_k z), .., z^{m_k-1} y^{(m_k-1)}(\mu_k z)\}.$$

Следующая теорема доказана в работе[5]. Здесь приведем независимое доказательство этого результата.

Теорема 4.1. *Любое решение однородного уравнения* (7) *представляется в виде конечной линейной комбинации функций из $E_{P_{\mathbb{C}}}$.*

Таким образом, в пространстве $P_{\mathbb{C}}$ имеет место аналог фундаментального принципа Эйлера представления решений в $H(\mathbb{C})$ для дифференциальных уравнений конечного порядка с постоянными коэффициентами.

В книге А.Ф. Леонтьева[6] была доказана разрешимость неоднородного уравнения бесконечного порядка в обобщенных производных, когда правая часть уравнения такого же порядка и типа, а характеристическая функция этого оператора имеет конечный порядок. Здесь доказывается разрешимость неоднородного уравнения свертки Данкла в пространстве $P_{\mathbb{C}}$ с характеристической функцией из пространства $H(\mathbb{C})$. Справедлива

Теорема 4.2. *Оператор свертки Данкла M_ψ сюръективен в $P_{\mathbb{C}}$.*

В параграфе 5 главы 1 исследуется оператор композиции оператора свертки и оператора умножения на функцию

$$M_\varphi[\psi \cdot f(z)] = (F, S_z[(\psi f)(t)]),\ F \in H^*(\mathbb{C}),\ f \in H(\mathbb{C}), \tag{8}$$

где ψ – фиксированная целая функция, φ – преобразование Данкла функционала F.

[5]Salem N. B., Kallel S. *Integro-differential-difference equations associated with the Dunkl operator and entire functions* // Comment. Math. Univ. Carolin. – 2004. – V. 45. –№ 4. – P. 699–725.

[6]Леонтьев А.Ф. *Обобщения рядов экспонент.* – Москва: Наука.– 1981.– С. 320.

Для нахождения сопряженного оператора рассмотрим оператор (8) как композицию двух операторов: M_φ, действующего из $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C})$, и оператора умножения на функцию $\psi \in H(\mathbb{C})$. В лемме 3.3 доказано, что сопряженный оператор к оператору M_φ есть оператор умножения на характеристическую функцию φ.

Лемма 5.1. *Сопряженным к оператору умножения на ψ является оператор свертки Данкла M_ψ в $P_\mathbb{C}$ следующего вида*

$$M_\psi[g(z)] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_A \psi(w)y(zw)\gamma(w)dw,\ g \in P_\mathbb{C},$$

где функция γ – ассоциированная по Борелю с $g(z)$, контур A замкнутый, спрямляемый и охватывает особенности γ.

Значит, сопряженным к оператору $M_\varphi[\psi\cdot]$ является оператор свертки Данкла $M_\psi[\varphi\cdot]$, действующий из $P_\mathbb{C}$ в $P_\mathbb{C}$, вида

$$M_\psi[\varphi(z)\cdot g(z)] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_A \psi(w)y(zw)\gamma(w)dw,\ g \in P_\mathbb{C},$$

где контур A замкнутый, спрямляемый и охватывает особенности ассоциированной по Борелю функции γ с $\varphi \cdot g$.

Во **второй главе** решена задача Валле Пуссена для оператора свертки Данкла на пространстве целых функций в случае простых узлов и в случае кратных узлов интерполяции, лежащих на вещественной оси.

В параграфе 6 решена задача Валле Пуссена в случае простых узлов интерполяции.

Пусть $M_\varphi[f] = 0$, где φ – характеристическая функция. Обозначим μ_j, $j = 1, 2, \ldots$ – нули функции $\psi \in H(\mathbb{C})$, а $KerM_\varphi = \{f \in H(\mathbb{C}) : M_\varphi[f] = 0\}$. Рассмотрим произвольную последовательность комплексных чисел a_j, $j = 1, 2, \ldots$ Поставим задачу Валле Пуссена следующим образом: найти функцию $u \in KerM_\varphi$ такая, что $u(\mu_j) = a_j$, $j = 1, 2, \ldots$

Как говорилось ранее, задача Валле Пуссена связана с парами Фишера. Доказано следующее утверждение

Теорема 6.1. *Задача Валле Пуссена для M_φ разрешима тогда и только тогда, когда имеет место представление Фишера*

$$H(\mathbb{C}) = KerM_\varphi + \{\psi(z)\cdot r(z) : r \in H(\mathbb{C})\}. \tag{9}$$

Лемма 6.1. *Выполнение представления Фишера* (9) *эквивалентно сюръективности оператора $M_\varphi[\psi\cdot]$.*

Значит, для разрешения задачи Валле Пуссена требуется доказать сюръективность оператора композиции свертки и умножения на функцию. Найдены условия на нули характеристической функции, при которых задача Валле Пуссена в ядре оператора свертки Данкла в $H(\mathbb{C})$ будет решена.

Напомним, что последовательность $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}, \ldots,\ q_k \in P_{\mathbb{C}}$ сходится к нулю, если выполняются условия $\exists B_1, B_2 > 0 : |q_k(z)| < B_1 e^{B_2|z|}$ и $q_k(z) \to 0$ равномерно на компактах плоскости $\mathbb{C}$ (см. Себастьян-и-Сильва Ж.[7]).

Здесь и далее под сходимостью подразумеваем сходимость в топологии соответствующего пространства.

Используя оценку (2), отметим, что если $|q_k(z)| < B_1 e^{B_2|z|}$, то $|q_k(z)| < B_1 y(\bar{B}_2|z|)$. Следовательно, условие сходимости можно записать в следующем виде. Последовательность $\{q_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,\ q_k \in P_{\mathbb{C}}$ сходится к нулю, если выполняются условия $\exists B_1, B_2 > 0 : |q_k(z)| < B_1 y(B_2|z|)$ и $q_k(z) \to 0$ равномерно на компактах плоскости $\mathbb{C}$.

Определение 6.1. *Пусть K – множество в $\mathbb{C}$, L – подпространство $P_{\mathbb{C}}$. Будем говорить, что множество K является секвенциально достаточным в L из $P_{\mathbb{C}}$, если любая последовательность $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$, $q_k \in L$, удовлетворяющая условиям:*

$$1)\, \exists B_1, B_2 > 0 : |q_k(z)| < B_1 y(B_2|z|), z \in K, \forall k \in \mathbb{N},$$

$$2)\, q_k(z) \to 0 \textit{ равномерно на любом компакте из } K,$$

сходится в L.

Через N_φ обозначим последовательность $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ положительных нулей функции $\varphi \in P_{\mathbb{C}}$, а через $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ – множество простых нулей функции $\psi \in H(\mathbb{C})$. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 6.2. *Пусть функция $\psi \in H(\mathbb{C})$ имеет простые нули $\mu_k \in \mathbb{R}_+$, $k = 1, 2, \ldots,$ а множество N_φ бесконечно. Тогда N_φ является секвенциально достаточным множеством в ядре оператора M_ψ.*

Теорема 6.3. *Пусть N_φ – секвенциально достаточное множество в ядре M_ψ, тогда оператор $M_\varphi[\psi\cdot]$ сюръективен в $H(\mathbb{C})$.*

Таким образом, в силу этих теорем получаем сюръективность оператора $M_\varphi[\psi\cdot]$, а значит и условия для разрешения задачи Валле Пуссена на пространстве целых функций.

В параграфе 7 главы 2 решена кратная задача Валле Пуссена в ядре оператора свертки Данкла на пространстве $H(\mathbb{C})$.

[7] Себастьян-и-Сильва Ж. *О некоторых классах локально-выпуклых пространств, важных в приложениях.* // Сб. пер. Математика. – 1957. – Т. 1.– С. 60–77

Рассмотрим $\varphi \in P_{\mathbb{C}}$ характеристическую функцию оператора свертки Данкла M_φ с нулями λ_i. Рассмотрим последовательность μ_k, $k = 1, 2, \dots$, для которой существует функция $\psi \in H(\mathbb{C})$ такая что μ_k нули кратности s_k. Сформулируем кратную задачу Валле Пуссена для этого случая. Пусть в каждой точке μ_k задан конечный набор комплексных чисел a_{kj}, $j = 0, 1, ..., s_k - 1$. Кратная задача Валле Пуссена состоит в следующем: найти функцию $u \in Ker M_\varphi$ такая, что $u^{(j)}(\mu_k) = a_{kj}$?

При решении этого задачи важную роль играют следующие теоремы.

Теорема 7.1. *Кратная задача Валле Пуссена для M_φ разрешима тогда и только тогда, когда имеет место представление Фишера* (9).

Из теоремы 7.1 и 6.3 получаем, что для решения кратной задачи Валле Пуссена требуется даказать секвенциальную достаточность нулей характеристической функции. Справедлива

Теорема 7.2. *Пусть функция $\psi \in H(\mathbb{C})$ имеет нули $\mu_k \in \mathbb{R}_+$, $k = 1, 2, \dots$ кратности s_k, а множество $N_\varphi = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\lambda_i > 0$ бесконечно. Тогда N_φ является секвенциально достаточным множеством в ядре оператора M_ψ.*

Получаем сюръективность оператора $M_\varphi[\psi \cdot]$, а значит условия разрешимости кратной задачи Валле Пуссена в ядре оператора свертки Данкла в $H(\mathbb{C})$.

Глава 3 посвящена решению задачи Валле Пуссена на полуплоскости в ядре оператора классической свертки.

В параграфе 8 главы 3 приведены необходимые сведения об операторах свертки в пространстве аналитических функций.

Пусть $\eta > 0$, $D = \{z : \, Rez < \eta\}$, $H(D)$ – пространство аналитических функций в области D с топологией равномерной сходимости на компактах, $H^*(D)$ – сопряженное к $H(D)$ пространство с сильной топологией.

Определим преобразование Лапласа $L \in H^*(D)$ по формуле

$$\hat{L}(z) = (L, e^{zt}).$$

Через P_D обозначим преобразование Лапласа всех функционалов из $H^*(D)$. Отметим, что $\hat{L}(z) \in P_D$. Справедлива оценка[8]: для любого $\varepsilon > 0$ существует $C(\varepsilon)$, такая что

$$|\hat{L}(z)| < C(\varepsilon) e^{(K(-\theta)+\varepsilon)|z|}, \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{10}$$

где $K(\theta)$ – опорная функция сопряженной диаграммы $\hat{L}(z)$. Отметим, что

[8]Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* – Москва: Наука. 1989. С. 176.

по теореме Полиа[9], в оценке (10) можем заменить опорную функцию $K(-\theta)$ индикатрисой роста $h_L(\theta)$.

Определение 8.4. *Пусть K – множество в $\mathbb{C}$, L – подпространство P_D. Будем говорить, что множество K является секвенциально достаточным в L из P_D, если любая последовательность $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$, $q_k \in L$, удовлетворяющая условиям:*

$$1)\, \exists J \Subset D \text{ и } C > 0 : |q_k(z)| < Ce^{h_J(\theta)|z|}, z \in K, \forall\theta \in [0, 2\pi], \forall k \in \mathbb{N},$$

$$2)\, q_k(z) \to 0 \text{ равномерно на любом компакте из } K,$$

сходится в L.

По определению оператор свертки имеет вид

$$U_\varphi[f(z)] = (F, f(z+t)),\ f \in H(D),\ F \in H^*(D), \tag{11}$$

где φ характеристическая функция оператора свертки.

Определение 8.7. *(см. Левин Б.Я.[10]) Целую функцию $v(z)$ порядка ρ называют целой функцией вполне регулярного роста, если можно указать такое множество E_0 нулевой относительной меры, что при $r \notin E_0$ и $r \to \infty$ функция*

$$\frac{\ln|v(re^{i\theta})|}{r^\rho}$$

равномерно стремится к $h_v(\theta)$.

Пусть функция φ вполне регулярного роста. Обозначим $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ненулевую последовательность нулей φ таких, что

$$\lambda_k \in \mathbb{R}_+, \quad \lambda_k \nearrow \infty, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Пусть D_1 – сопряженная диаграмма функции φ. Пусть множество D_2 такая вертикальная полуплоскость в $\mathbb{C}$, которая удовлетворяет $D = D_1 + D_2$. Оператор $U_\varphi[f]$ действует из $H(D)$ в $H(D_2)$[11]. Оператор $U_\varphi[f]$ линейный, непрерывный, а так как φ вполне регулярного роста, то и сюръективный[12].

Пусть функция ψ из $H(D)$ имеет нули μ_k кратности s_k такие, что

$$\mu_k \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{k\to\infty} \mu_k = \eta, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

---

[9]Polya G. *Untersuchungen uber Lucken und Singularitaten von Potenzreihen* // Math. Z. 1929. Vol. 29. Pp. 549–640.

[10]Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* – Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1956. С. 632.

[11]Коробейник Ю.Ф. *О решениях некоторых функциональных уравнений в классах функций, аналитических в выпуклых областях* // Матем. сб. – 1968.– Т. 75,–№ 2.– С. 225–234.

[12]Епифанов О.В. *Разрешимость уравнения свертки в выпуклых областях* // Матем. заметки. – 1974. – Т. 15. – № 5.– С. 787–796.

Рассмотрим оператор свертки (11) на пространстве P_D. Он имеет вид

$$U_\psi[y(z)] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_A \psi(w)e^{zw}\gamma(w)dw,\ z \in \mathbb{C},$$

где $y \in P_D$, $\psi \in H(D)$, γ– функция, ассоциированная по Борелю с y, контур A замкнутый, спрямляемый, охватывает особенности γ.

Важную роль для решения задачи Валле Пуссена играет следующий оператор $U_\varphi[\psi(z)\cdot f(z)]$. Он действует линейно и непрерывно из $H(D)$ в $H(D_2)$. Сопряженный к нему оператор имеет вид

$$U_\psi[\varphi(z)\cdot g(z)] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_A \psi(w)e^{zw}\gamma(w)dw,\ g \in P_{D_2},$$

где γ – функция, ассоциированная по Борелю с $\varphi \cdot g$, контур A замкнутый, спрямляемый, охватывает особенности γ. Этот оператор действует из P_{D_2} в P_D, так как индикатор произведения функций, одна из которых вполне регулярного роста, равен сумме индикаторов сомножителей.

В параграфе 9 главы 3 решена задача Валле Пуссена на полуплоскости в ядре оператора свертки с характеристической функцией вполне регулярного роста. Рассматривается случай кратных узлов интерполяции, лежащих на вещественной оси.

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 9.1. *Задача Валле Пуссена для U_φ разрешима тогда и только тогда, когда имеет место представление Фишера*

$$H(D) = KerU_\varphi + \{\psi(z)\cdot r(z) : r \in H(D)\}. \tag{13}$$

Пусть $N_\varphi = \{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ – множество положительных нулей функции φ.

Теорема 9.2. *Сюръективность оператора $U_\varphi[\psi\cdot]$ эквивалентна выполнению представления Фишера* (13).

Из теорем 9.1. и 9.2. следует, что для решения задачи Валле Пуссена необходимо доказать сюръективность оператора $U_\varphi[\psi\cdot]$.

Теорема 9.3. *Пусть функция $\psi \in H(D)$ имеет нули μ_k кратности s_k, удовлетворяющие* (12). *Пусть функция φ вполне регулярного роста, а множество N_φ бесконечно. Тогда N_φ секвенциально достаточное множество в ядре оператора U_ψ в P_D.*

Теорема 9.4. *Пусть φ функция вполне регулярного роста, $N_\varphi = \{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ секвенциально достаточное множество в ядре оператора U_ψ. Тогда оператор $U_\varphi[\psi\cdot]$ сюръективен в $H(D_2)$.*

Таким образом, из теорем 9.3. и 9.4. получаем сюръективность оператора $U_\varphi[\psi\cdot]$, а значит условия разрешимости задачи Валле Пуссена в полуплоскости.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность за предложенную тему исследований, постоянное внимание, неоценимую помощь и всестороннюю поддержку своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, члену–корреспонденту РАН Валентину Васильевичу Напалкову, а также за полезные советы и замечания д.ф.-м.н. Мусину И.Х., д.т.н. Водопьянову В.В.
Некоторые из результатов диссертационного исследования были получены в ходе работ по гранту РФФИ №14-01-00720а.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов исследований

1. Забирова, К.Р. *Операторы свертки Данкла и их свойства* / К.Р. Забирова, В.В. Напалков // Доклады академии наук. – 2013. – Т. 449. – № 6. – С. 632–634.

2. Забирова, К.Р. *Операторы свертки Данкла и многоточечная задача Валле Пуссена* / К.Р. Забирова, В.В. Напалков // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. – 2013. – Т. 1. – В. 30. – С. 70–81.

3. Зименс, К.Р. *Кратная задача Валле Пуссена на выпуклых областях в ядре оператора свертки* / К.Р. Зименс, В.В. Напалков // Доклады академии наук. – 2014. – Т. 458. – № 4. – С. 387–389.

4. Зименс, К.Р. *Задача Валле Пуссена в ядре оператора свертки на полуплоскости* / К.Р. Зименс, В.В. Напалков // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. – 2015. – Т. 19. – № 2. – С. 283–292.

5. Забирова, К.Р. *Об операторах композиции свертки и умножения на функцию* / К.Р. Забирова, В.В. Напалков // Матемематические заметки. – 2016. – Т. 99.– В. 3 – С. 350–360.

Публикации в других изданиях

6. Забирова, К.Р. *Об одной задаче оператора свертки Данла* / К.Р. Забирова // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании. Тезисы докладов международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых. – Уфа. – 2012. – С. 190–191.

7. Забирова, К.Р. *Интерполяционная задача оператора свертки Данкла* / К.Р. Забирова // Тезисы Международной научной конференции «Нелинейный анализ и спектральные задачи». – Уфа. – 2013. – С. 50–52.

8. Забирова, К.Р. *Операторы свертки Данкла и многоточечная задача Валле Пуссена* / К.Р. Забирова, В.В. Напалков // Математическая физика и ее приложения. Сборник материалов конференции Самарского Государственного Технического Университета. – 2012. – С. 135–137.

9. Забирова, К.Р. *Об операторах композиции умножения на функцию и свертки* / К.Р. Забирова, В.В. Напалков // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. – Казань. – 2013. – Т. 46. – С. 197–199.

10. Зименс, К.Р. *Интерполяционная задача для операторов свертки на выпуклых областях* / К.Р. Зименс, В.В. Напалков // Математическая физика и ее приложения. Сборник материалов конференции Самарского Государственного Технического Университета. – 2014. – С. 181–182.

11. Зименс, К.Р. *Задача Валле Пуссена для операторов свертки на выпуклых областях* / К.Р. Зименс, В.В. Напалков // Тезисы Международной научной конференции «Нелинейный анализ и спектральные задачи». – Уфа. – 2014. – С. 33–35.

12. Зименс, К.Р. *Об одной задаче оператора свертки на выпуклых областях* / К.Р. Зименс, В.В. Напалков // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании. Тезисы докладов международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых. – Уфа. – 2014. – С. 264.

13. Зименс, К.Р. *Задача Валле Пуссена в ядре оператора свертки на*

выпуклых областях / К.Р. Зименс, В.В. Напалков // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. – Казань. – 2015. – Т. 51. – С. 199–201.